

**Демонстрационный вариант заданий для практической части
предпрофессионального экзамена в рамках проекта
«Инженерный класс в московской школе»
на площадке РХТУ им. Д.И. Менделеева**

Направление практической части: Моделирование, прототипирование, прикладная математика.

Направление подготовки: Исследовательское.

Прочитайте текст и выполните задания к нему.

Во многих практических областях возникают задачи оптимизации решений, для которых характерны следующие черты: целевая функция (показатель эффективности) представляет собой линейную функцию от вектора неизвестных $x = (x_1, \dots, x_n)$; система ограничений, налагаемых на возможные решения, имеет вид линейных равенств или неравенств. Такие задачи принято называть *задачами линейного программирования*.

Задача линейного программирования формулируется следующим образом. Среди точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = l + 1, \dots, m; \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

найти те, в которых функция $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ принимает наименьшее (или наибольшее) значение, и определить это значение.

Любой вектор неизвестных $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (1) и (2) при $x_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, n$; называют *допустимым решением*. *Оптимальным решением* называется то из допустимых решений, при котором функция $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ принимает наименьшее (или наибольшее) значение.

Если задача линейного программирования содержит только две переменные и в ее условии нет ограничений-равенств (1), то такую задачу можно исследовать и решить графически.

Рассмотрим задачу

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (5)$$

На плоскости $(x_1; x_2)$ любое из неравенств (4) определяет полуплоскость, лежащую по одну из сторон от прямой $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$. Для того чтобы определить расположение этой полуплоскости относительно граничной прямой, можно подставить координаты какой-либо точки (при $b_i \neq 0$ проще всего взять начало координат) в соответствующее неравенство (4) и проверить его выполнение.

Таким образом, допустимое множество U задачи (3)–(5) является пересечением первого квадранта $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ и полуплоскостей, соответствующих неравенствам (4). Поэтому множество U представляет собой либо:

а) пустое множество, тогда задача (3)—(5) не имеет решений из-за несовместности ограничений (4), (5);

б) многоугольник (рис. 1);

в) неограниченное многоугольное множество (рис. 2).

Прямая, вдоль которой функция $f(x)$ сохраняет постоянное значение, называется линией уровня, то есть линия уровня имеет вид:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C, C = \text{const} \quad (6)$$

Для решения задачи (3)—(5) в случае $U \neq \emptyset$ рассмотрим семейство линий уровня функции $f(x)$ из (3), эти линии являются параллельными прямыми.

При увеличении или уменьшении значения постоянной C линия уровня будет перемещаться вдоль многогранника решений.

Вектор $(-c_1, -c_2) = e$ перпендикулярен к прямым (6) и указывает направление убывания $f(x)$, а направление возрастания указывает вектор $\vec{q} = (c_1, c_2)$.

Если перемещать параллельно самой себе произвольную прямую (6), проходящую через допустимое множество U , в направлении e убывания $f(x)$ до тех пор, пока эта прямая будет иметь хотя бы одну общую точку с множеством U , то в своем крайнем положении указанная прямая пройдет через точку множества U , в которой целевая функция $f(x)$ принимает наименьшее на U значение.

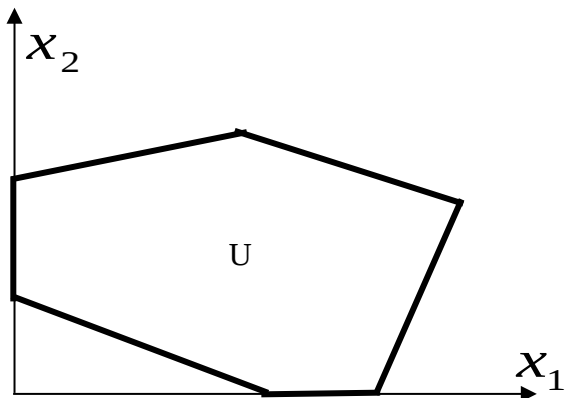


Рис. 1

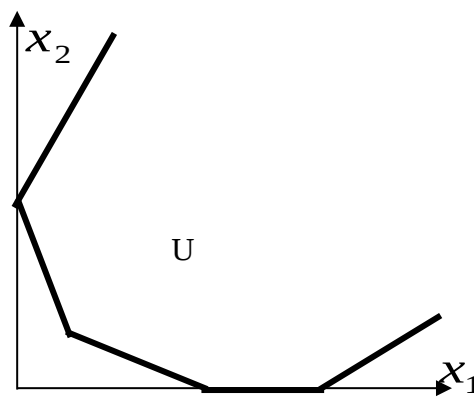


Рис. 2

Пример 1. Используя графический метод, найти решение следующей задачи линейного программирования $f(x) = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$, $x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 + x_2 \leq 8$, $x_1 + 2x_2 \leq 8$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Решение. Изобразим на плоскости $(x_1; x_2)$ допустимое множество U данной задачи (многоугольник $ABSDE$) и одну из линий уровня $-2x_1 - 3x_2 = C$ целевой функции (рис. 3).

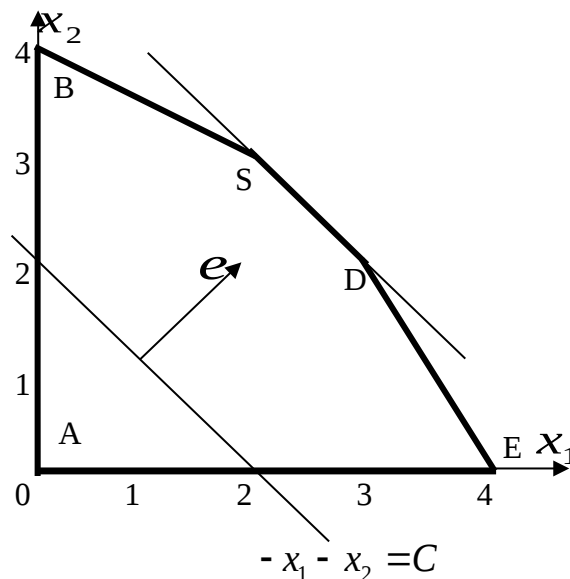
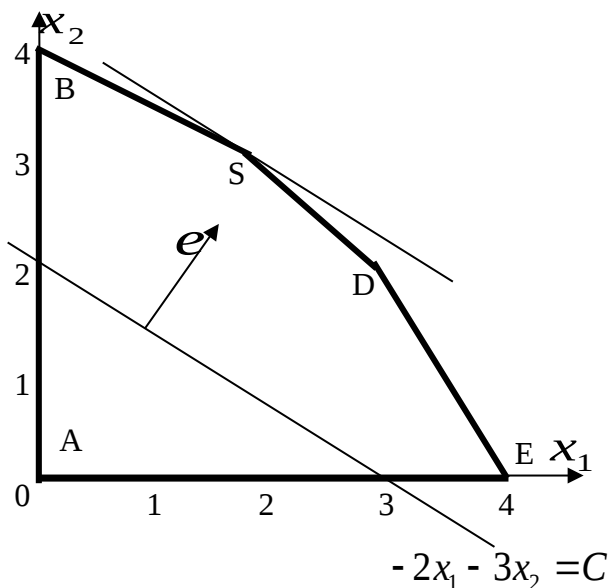


Рис. 3

Направление убывания $f(x)$ указывает вектор $e = (2, 3)$. Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль направления e , находим её крайнее положение. В этом положении прямая $-2x_1 - 3x_2 = C$ проходит через вершину $S(2, 3)$ многоугольника $ABSDE$. Поэтому целевая функция $f(x)$ принимает наименьшее значение f^* в точке $x^* = (2, 3)$, причем $f^* = f(2, 3) = -13$.

Задача линейного программирования (3)–(4) может иметь и бесконечное множество решений.

Пример 2. Решить задачу линейного программирования с целевой функцией $f(x) = -x_1 - x_2$ и ограничениями на допустимое множество U , взятыми из примера 1.

Решение. Множество U построено при решении примера 1. На рис. 4 изображена линия уровня $-x_1 - x_2 = C$ целевой функции $f(x)$. В своем крайнем положении при параллельном переносе вдоль направления $e = (1, 1)$ она содержит сторону SD многоугольника $ABSDE$. Таким образом, все точки отрезка SD являются точками минимума функции $f(x)$ на множестве U . Так как концы S и D этого отрезка имеют координаты $(2, 3)$ и $(3, 2)$ соответственно, то любая точка минимума $f(x)$ представима в виде

$$x^* = \alpha(2, 3) + (1 - \alpha)(3, 2) = (3 - \alpha, 2 + \alpha), \text{ где } \alpha \in [0; 1].$$

Наименьшее значение целевой функции $f^* = f(x^*) = -5$.

В случае неограниченного допустимого множества U задача линейного программирования (3)–(5) может не иметь решения, так как целевая функция на таком множестве может быть неограниченной снизу или сверху.

Пример 3. Решить графическим методом задачу линейного программирования

$$f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min, \quad x_1 + 2x_2 \geq 2, \quad 2x_1 - x_2 \geq -1, \quad x_1 - 2x_2 \leq 2, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Решение. Допустимое множество U данной задачи представляет собой неограниченное многоугольное множество (рис. 5). Функция $f(x)$ убывает в направлении $e = (1, 1)$. При параллельном переносе линии уровня $-x_1 - x_2 = C$ вдоль направления e она всегда пересекает множество U , а целевая функция $f(x)$ неограниченно убывает. Поэтому рассматриваемая задача не имеет решений.

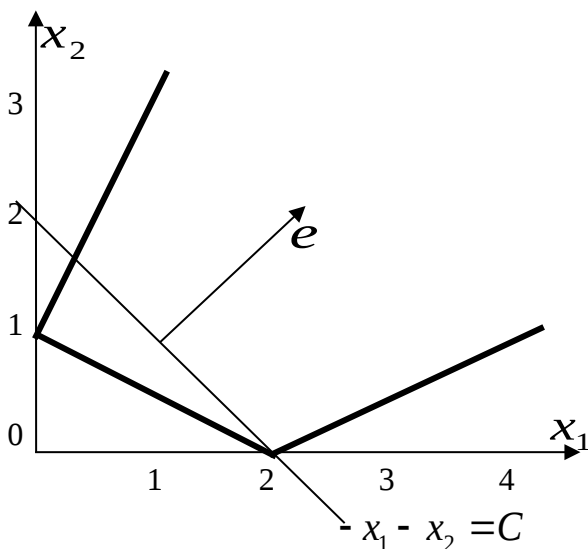


Рис. 5

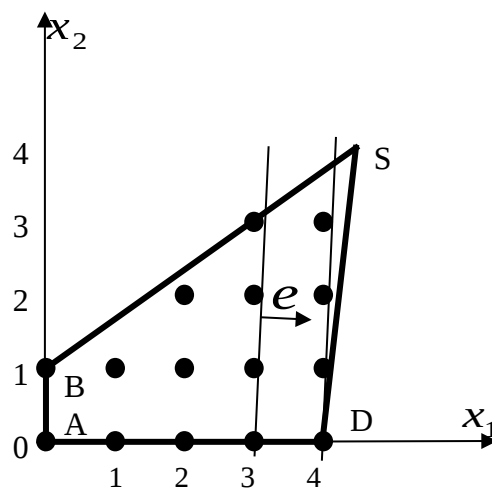


Рис. 6

Во многих случаях на допустимое множество задачи линейного программирования (3)–(5) накладывается дополнительное требование целочисленности переменных x_j . Если этому требованию должны удовлетворять все переменные, то получаем *полностью целочисленную задачу линейного программирования*, которая в каноническом виде записывается следующим образом:

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min; \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad x_j \geq 0; \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Полностью целочисленную задачу с двумя переменными можно решить графически, учитывая, что допустимое множество $\tilde{U}$ этой задачи состоит из точек целочисленной координатной сетки, принадлежащих допустимому множеству U задачи линейного программирования без дополнительного требования (7).

К решению задачи линейного программирования приводят многие задачи оптимального планирования.

ЗАДАНИЯ.

I. Вопросы по тексту:

- 1) Сколько решений может иметь задача линейного программирования?
- 2) Какое решение называется оптимальным?
- 3) Что называется линией уровня функции?
- 4) Какой вектор указывает направление возрастания функции?

II. Решить полностью целочисленную задачу линейного программирования графическим методом:

$$f(x) = -16x_1 + x_2 \rightarrow \min; \quad 8x_1 - x_2 \leq 32; \quad -2x_1 + 3x_2 \leq 3; \quad x_1, x_2 \geq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Решение. На плоскости (x_1, x_2) построим допустимое множество U рассматриваемой задачи линейного программирования без требования целочисленности (многоугольник $ABSD$ на рис. 6) и отметим точки множества U с целочисленными координатами. Совокупность этих точек представляет собой допустимое множество $\tilde{U}$ полностью целочисленной задачи.

Перемещая линию уровня целевой функции $f(x)$ в направлении $e = (16, -1)$ убывания $f(x)$, находим крайнее положение этой линии, в котором она еще имеет непустое пересечение с множеством $\tilde{U}$. В этом положении линия уровня проходит через точку $D(4, 0)$, поэтому решение задачи имеет вид $\tilde{x}^* = (4, 0)$, $\tilde{f}^* = \min_U f(x) = -64$.

Ответ: -64.

Замечание. Отметим, что, как видно из рис. 6, точкой минимума $f(x)$ в данной задаче без требования целочисленности является точка $S(4, 5)$, т. е. $x^* = (4, 5)$, $f^* = \min_U f(x) = -68$.

Отсюда следует, что точкой минимума целевой функции на допустимом множестве $\tilde{U}$ целочисленной задачи не обязательно является ближайшая к решению x^* обычной (нецелочисленной) задачи точка множества U с целочисленными координатами.

III. Для увеличения выпуска химической продукции решено расширить производство за счет использования имеющейся свободной площади в 70 кв.м, на которой предполагается установить оборудование двух видов общей стоимостью не более 100 млн. руб. Каждый комплект оборудования вида А занимает 20 кв. м, стоит 10 млн. руб. и позволяет получить за смену 40 ед. продукции, а каждый комплект оборудования вида В занимает 10 кв. м, стоит 30 млн. руб. и позволяет получить за смену 80 ед. продукции. Определить значение максимально возможного прироста выпуска продукции. **Решить полностью целочисленную задачу линейного программирования без использования графического метода.**

Решение:

Пусть x и y – число комплектов приобретенного оборудования для химического производства видов А и В соответственно. Поскольку их установка требует $20x+10y$ кв. м площади, а стоимости этого оборудования составляет $10x+30y$ млн. руб., то в силу ограничений площади (70 кв. м) и денежных ресурсов (100 млн. руб) получаем следующие ограничения на изменение целочисленных переменных:

$$2x + y \leq 7, x + 3y \leq 10, 0 \leq x, 0 \leq y. \quad (8)$$

Прирост выпуска продукции составляет

$$N = 40x + 80y = 40(x + 2y).$$

Поэтому удобно перейти к переменным n и y , где $n=x+2y$ – целое число. В силу соотношения $x = n - 2y$ из неравенств (8) получаем ограничения

$$2n - 3y \leq 7, n + y \leq 10,$$

$$2y - n \leq 0, 0 \leq y.$$

Из этих ограничений следуют двойные неравенства

$$(2n - 7)/3 \leq y \leq 10 - n, \quad (9)$$

$$0 \leq y \leq n/2. \quad (10)$$

Итак, для решения задачи нам требуется найти наибольшее целое значение числа n , при котором выполнены условия (9) и (10). Неравенство (9) имеет смысл при выполнении ограничения $(2n - 7)/3 \leq 10 - n$, откуда следует условие $n \leq 37/5 = 7,4$. Поскольку n – целое число, то $n \leq 7$.

Рассмотрим условие (9) при $n = 7$: $7/3 \leq y \leq 3$. Это неравенство имеет единственное целочисленное решение $y = 3$. Так как при $n = 7$ и $y = 3$ неравенство (10) выполнено, то наибольшее значение числа n , равное 7, достигается при $x = n - 2y = 1$. Таким образом, для оптимального числа комплектов приобретенного оборудования видов А и В получаем $x = 1$ и $y = 3$, а соответствующее им значение прироста выпуска продукции равно $N = 40n = 280$ ед. в смену.

Ответ: 280 ед. в смену.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Максимальное количество баллов - 60

1. Вопросы по тексту. Максимально 12 баллов (4 вопроса по 3 балла максимально).

Критерии по каждому вопросу:

0 баллов - ответ не дан или дан строго неверно;

1 балл - ответ дан неполностью либо с существенными недостатками;

2 балла - ответ дан верно с несущественными погрешностями;

3 балла - ответ дан верно и полно.

2. Задание II. Максимально 24 балла:

0 баллов - нет идеи решения

1– 8 баллов - верно выполнен рисунок многогранника, но не построена линия уровня, не указан вектор убывания, не найдено правильное целочисленное решение;

9– 16 баллов - верно выполнен рисунок многогранника, построена линия уровня, но не указан вектор убывания и не найдено правильное целочисленное решение;

17– 23 баллов - верно выполнен рисунок многогранника, построена линия уровня, указан вектор убывания, но не найдено правильное целочисленное решение;

24 балла - верно выполнен рисунок многогранника, верно построена линия уровня и указан вектор убывания, найдено правильное целочисленное решение.

3. Задание III. Максимально 24 балла:

0 баллов - нет идеи решения

1 – 2 балла – есть рассуждения, не приводящие к математической модели;

3 – 8 баллов - получена математическая модель в виде целевой функции и системы

ограничений в виде неравенств, но нет её решения;

9 – 16 баллов - получена математическая модель в виде целевой функции и системы ограничений в виде неравенств, выполнены преобразования системы неравенств, но неправильно получена область решения;

17 – 23 баллов - получена математическая модель в виде целевой функции и системы ограничений в виде неравенств, правильно выполнены преобразования системы неравенств, приводящие к получению области решения, но не выбрано оптимальное решение;

24 балла - верно составлена математическая модель в виде целевой функции и системы ограничений в виде неравенств, правильно выполнены преобразования системы неравенств, приводящие к получению области решения, верно проведён анализ и выбрано оптимальное решение.

Тематическое содержание практической части предпрофессионального экзамена для инженерных классов на базе РХТУ имени Д.И. Менделеева

Направление практической части: Моделирование, прототипирование, прикладная математика.

1. Тожественные преобразования числовых выражений. Преобразование рациональных и иррациональных алгебраических выражений.
2. Решение рациональных уравнений и систем рациональных уравнений. Решение рациональных неравенств и систем рациональных неравенств.
3. Решение иррациональных уравнений и систем иррациональных уравнений. Решение иррациональных неравенств и систем иррациональных неравенств.
4. Решение алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Решение алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений, содержащих переменную под знаком модуля. Решение алгебраических неравенств и систем алгебраических неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.
5. Решение задач на арифметическую и геометрическую прогрессии.
6. Текстовые задачи на представление чисел, на движение, на работу, проценты.
7. Функция. Преобразование графиков.
8. Тригонометрические функции: определения, свойства, графики. Тожественные преобразования тригонометрических выражений. Решение тригонометрических уравнений. Решение тригонометрических уравнений и простейших тригонометрических неравенств.
9. Показательная функция: определение, свойства, график. Решение показательных уравнений и систем показательных уравнений. Решение показательных неравенств и систем показательных неравенств.
10. Логарифмическая функция: определение, свойства, график. Тожественные преобразования логарифмов. Решение логарифмических уравнений. Решение логарифмических уравнений и систем логарифмических уравнений. Решение логарифмических неравенств и систем логарифмических неравенств.
11. Предел функции. Производные элементарных функций и её применение. Правила дифференцирования. Решение задач на исследование свойств функции с помощью элементов математического анализа.
12. Решение задач с параметрами.
13. Решение геометрических задач: планиметрия. Прямоугольная декартова система координат на плоскости. Прямая на плоскости (построение прямой,

точка пересечения двух прямых на плоскости, общее уравнение прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом). Расстояние между двумя точками. Середина отрезка. Углы. Многоугольники. Окружность и круг. Вписанные углы.

14. Решение геометрических задач: стереометрия. Многогранники.

Прямоугольный параллелепипед. Призма. Цилиндр. Конус. Шар.

15. Векторы: определение, свойства, операции над векторами, скалярное произведение векторов и его приложения.